



Научная статья

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.3.02

УДК 531/534: [57+61]

## МЕХАНИКА ГОРНЫХ ЛЫЖ: ПОВОРОТ С БОКОВЫМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ И ВИБРАЦИЕЙ НА КАРВИНГОВЫХ ЛЫЖАХ

С.Д. Леготин<sup>1</sup>, К.Б. Обносков<sup>1</sup>, А.А. Ривлин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup> Учебный центр Федерации горнолыжного спорта и сноуборда России, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 21 мая 2022

Одобрена: 29 августа 2022

Принята к публикации: 02 сентября 2022

#### Ключевые слова:

спортивная биомеханика, горные лыжи, ангуляция, наклон лыжника, скользящий горнолыжный поворот, вибрация лыж, моделирование.

### АННОТАЦИЯ

В опубликованных к настоящему времени работах, рассматривающих вопрос о математическом моделировании горнолыжного скользящего поворота, не учитывается параметр характерного для конструкции современных горных лыж бокового выреза определенного радиуса. Наличие такого выреза является одним из главных факторов поведения лыжи при выполнении любого поворота, включая поворот с боковым скольжением. Представленная работа посвящена созданию численной модели движения механической системы "лыжник-лыжник" при выполнении поворота на карвинговых лыжах с боковым проскальзыванием и вибрацией. При этом рассматривается поворот в условиях относительного равновесия в системе отсчета, связанной с движущимся центром масс и с учетом управляемой лыжником ангуляции. В качестве основного допущения модели принимается предположение, что движение в скользящем повороте можно разложить на ортогональные направления: боковое скольжение и движение вдоль лыж по алгоритму, соответствующему чистому резаному повороту (карвингу) [18]. В модели производится учет сил сопротивления движению – силы трения скольжения и силы аэродинамического сопротивления. Для большей общности и универсальности разработанная численная модель реализована для безразмерных параметров движения, а именно для описания безразмерных кинематических характеристик движения центра масс рассматриваемой механической системы. Получена система интегральных уравнений, с помощью которой можно найти скорость, время и траекторию движения центра масс, а также оценить углы, характеризующие положение тела лыжника и его лыж относительно склона при различных, задаваемых спортсменом стиливых ангуляциях. Созданная модель проиллюстрирована решением задачи для различных управляемых лыжником зависимостей угла скольжения.

© ПНИПУ

### Введение

Механике движения по горнолыжной трассе посвящены ряд работ, включая работы отечественных исследователей [5–7]. В чистом резаном повороте траектория движения лыж определяется кривизной контактной линии между склоном и лыжами, поставленными под

неким углом закантовки к поверхности склона. При этом радиус кривизны контактной линии для твердой недеформированной поверхности связан с радиусом бокового выреза лыжи и углом закантовки [12; 19]. Подробный анализ механики чистого резаного поворота проведен в работе [14]. В скользящих поворотах, как описано в работах [11; 20; 23], движение лыж по дуге

© Леготин Сергей Дмитриевич – к.т.н., доцент, e-mail: [legotin.msiu@bmstu.ru](mailto:legotin.msiu@bmstu.ru) ID: 0000-0001-6056-7955

© Обносков Константин Борисович – к.ф.-м.н., доцент, e-mail: [obnosov@bmstu.ru](mailto:obnosov@bmstu.ru)

© Ривлин Александр Александрович – преподаватель, e-mail: [alriv@inbox.ru](mailto:alriv@inbox.ru)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

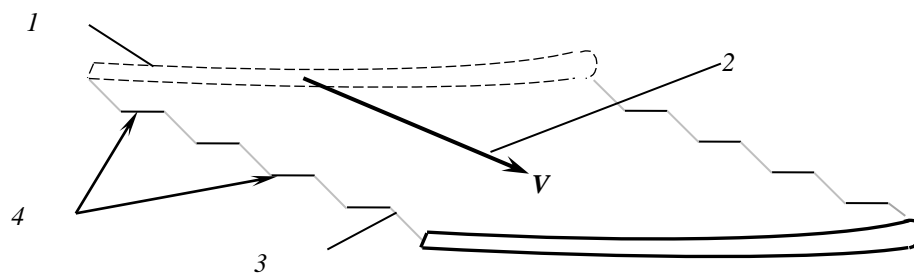


Рис.1. След лыжи на снегу при косом боковом скольжении с вибрацией: 1 – ориентационное направление лыжи; 2 – направление средней скорости движения; 3 – ступенькообразный след лыжи; 4 – «полочки» ступенек

в плоскости склона обуславливается наличием поперечной составляющей силы реакции снега, которая перпендикулярна направлению движения лыж.

Цель представленной работы – анализ механики скользящего поворота. Механике горнолыжного поворота с проскальзыванием посвящены работы С. Комиссарова [15; 16], в которых рассмотрены силы, действующие на лыжи, находящиеся в условиях бокового косоугольного скольжения без учета наличия у них типичного для современных спортивных горных лыж бокового выреза.

При таком подходе нивелируется разница в геометрии лыж при выполнении поворотов с проскальзыванием, что противоречит реальному поведению лыж с боковыми вырезами разной кривизны в таких поворотах. Практика бокового косоугольного скольжения по горнолыжной трассе показывает, что такое движение часто оставляет на снегу специфический след, имеющий форму косых ступенек, вырисовываемых задниками лыж (рис.1), и сопровождается поперечной вибрацией лыж с характерными звуковыми хлопками при автоколебательных смещениях лыж с одной ступеньки на другую.

Такое специфическое движение лыж позволяет предположить, что при боковом косоугольном скольжении наблюдаются участки, на которых перемещение лыж по снегу происходит исключительно вдоль самих лыж и без бокового проскальзывания, т.е. по законам чистого карвинга. В последующей части такого ступенькообразного движения лыжа плавно скользит в заносе вплоть до следующей ступеньки. Таким образом, движение лыжи в таком повороте представляет собой последовательное сочетание резаного движения и бокового скольжения в заносе. Следует отметить, что переход из бокового скольжения в движение вдоль ступеньки происходит неконтролируемым образом, т.е. лыжник не управляет моментом перехода из одного вида движения в другое. Поскольку лыжник движется на двух лыжах, каждая из которых загружена по-разному в зависимости от распределения лыжником эффективной динамической нагрузки между лыжами, характер движения каждой лыжи в таком повороте может также отличаться. Речь идет об отличиях в движениях внешней и внутренней лыжи в таком повороте. У лыж могут отличаться моменты переходов от бокового скольжения к резаному движению в ступеньке, продолжительности рассматриваемых видов движений, общее время движения

по ступеньке и бокового скольжения до следующей ступеньки. При этом движения обеих лыж могут быть и несинхронными вплоть до случая, когда внешняя лыжа движется по ступенькам, а внутренняя – в скользящем заносе. Иными словами, физика такого процесса до конца не изучена и представляет собой ряд весьма сложных вопросов. При построении численной модели в качестве рабочей гипотезы будем считать, что шаг ступенек на общий характер движения не влияет, что позволяет трактовать косое движение лыж аналогичным образом даже без наличия видимых ступенек после проезда лыж по снегу.

## Численная модель движения лыж при косом боковом скольжении

### Кинематическая схема

На рис. 2 представлена кинематическая схема движения лыжи при косом боковом проскальзывании. На этом рисунке ось  $Oy$  направлена вдоль линии падения склона, ось  $Ox$  – в поперечном направлении, образуя вместе с осью  $Oy$  плоскость склона. Ось  $Oz$  (не показана) ортогональна плоскости склона и направлена по его нормали, т.е. перпендикулярно плоскости рисунка. Тогда  $\beta$  – угол между вектором скорости  $V$  опорной точки (т.  $O$ ) и линией падения склона, или **угол движения**. Угол  $\gamma$  между ориентационным направлением лыжи и вектором скорости  $V$  назовем **углом скольжения**, или, как принято в зарубежной литературе, **углом атаки**. Их сумма  $\beta + \gamma = \chi$  составляет **ориентационный угол** лыжи  $\chi$  относительно линии падения склона. Тогда величины проекций скорости движения на ориентационное направление лыжи  $V_{||}$ , а также на ортогональное к нему направление  $V_{\perp}$  составят:

$$V_{||} = V \cos \gamma; \quad V_{\perp} = V \sin \gamma. \quad (1)$$

### Динамическая схема

Движение лыжника в скользящем повороте определяется приложенными к нему силами. Это сила тяжести, реакция опорной поверхности, равнодействующая  $R_O$  которой приложена к условной опорной точке (т.  $O$ ), при этом реакция опорной поверхности включает силу трения.

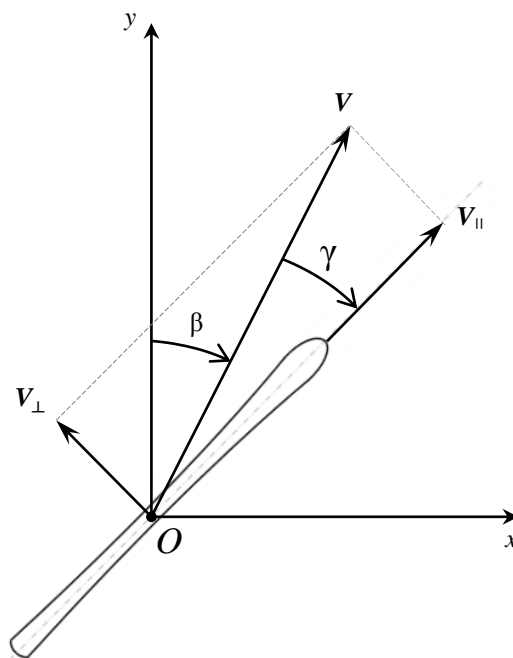


Рис. 2. Схема косоугольного бокового скольжения

Это сила аэродинамического сопротивления  $F_d$ , приложенная к центру аэродинамического сопротивления системы «лыжник–лыжи», а также сила инерции, если рассматривать лыжника в подвижной системе отсчета, связанной с его центром масс. Характерный радиус кривизны для траектории движения центра масс в горнолыжном повороте многократно больше разностей в удаленностях точек рассматриваемой механической системы от центра кривизны траектории, т.е. поле сил инерции в повороте мало отличается от однородного. Это позволяет считать, что точка приложения равнодействующей сил инерции, равной массе лыжника, умноженной на центростремительное ускорение его центра масс и направленной наружу поворота, практически совпадает с центром масс (т. С). Введем понятие «опорная линия», как линия действия вектора равнодействующей опорных реакций со стороны склона. Как показано в работе [17], опорная линия при горнолыжном повороте является аналогом линий действия силы тяжести и опорной реакции при статическом положении лыжника и является основным ориентиром для лыжника при сохранении стабильности своего положения. Опорная линия пересекает склон в области между ботинками горнолыжника. Для простоты будем считать, что центр аэродинамического сопротивления, сила тяжести и сила инерции приложены к одной точке – центру масс лыжника, формируя равнодействующую внешних сил, включая силу инерции. Учитывая, что с учетом допущенных приближений на механическую систему фактически действуют только две силы – равнодействующая внешних сил, включая силу инерции, и равнодействующая опорных реакций, то в условиях относительного (динамического) равновесия линии их действия должны совпадать и проходить через центр масс системы.

При рассмотрении динамической схемы следует отметить, что силовая схема выбирается для условий так называемого «динамического равновесия», или динамического баланса сил. При динамическом балансе выполняются условия равновесия системы приложенных сил в неинерциальной системе отсчета, связанной с движущимся центром масс механической системы «лыжник – лыжи». Причины выбора условий динамического равновесия две. Первая связана с инстинктивным стремлением человека во избежание потери равновесия и падения занимать относительное уравновешенное положение при любых, не слишком динамических движениях тела относительно своего центра масс, а при отклонении от динамического баланса рефлекторно возвращаться в него [17]. Иными словами, при ведении дуги поворота лыжник находится в положении динамического равновесия или вблизи него. Вторая обусловлена тем, что при динамическом равновесии (балансе) можно найти соответствующее этому условию определенное положение лыжника в рассматриваемый момент времени, угол наклона его тела и, с учетом принимаемой им ангуляции, закатовку лыж. Это дает возможность однозначно построить траекторию движения центра масс и оценить скорость движения по траектории. В отсутствии баланса такой однозначной оценки параметров движения лыжника получить нельзя, поскольку для этого нужно учитывать все нюансы и особенности индивидуального управления конкретным лыжником своим телом и лыжами в каждом конкретном повороте, что приводит к неопределенно большому многообразию рассчитываемых параметров горнолыжного поворота. Именно такими особенностями и сложностями описания индивидуальных движений лыжника характеризуется самый динамичный и технически сложный вид горнолыжных соревнований – слалом.

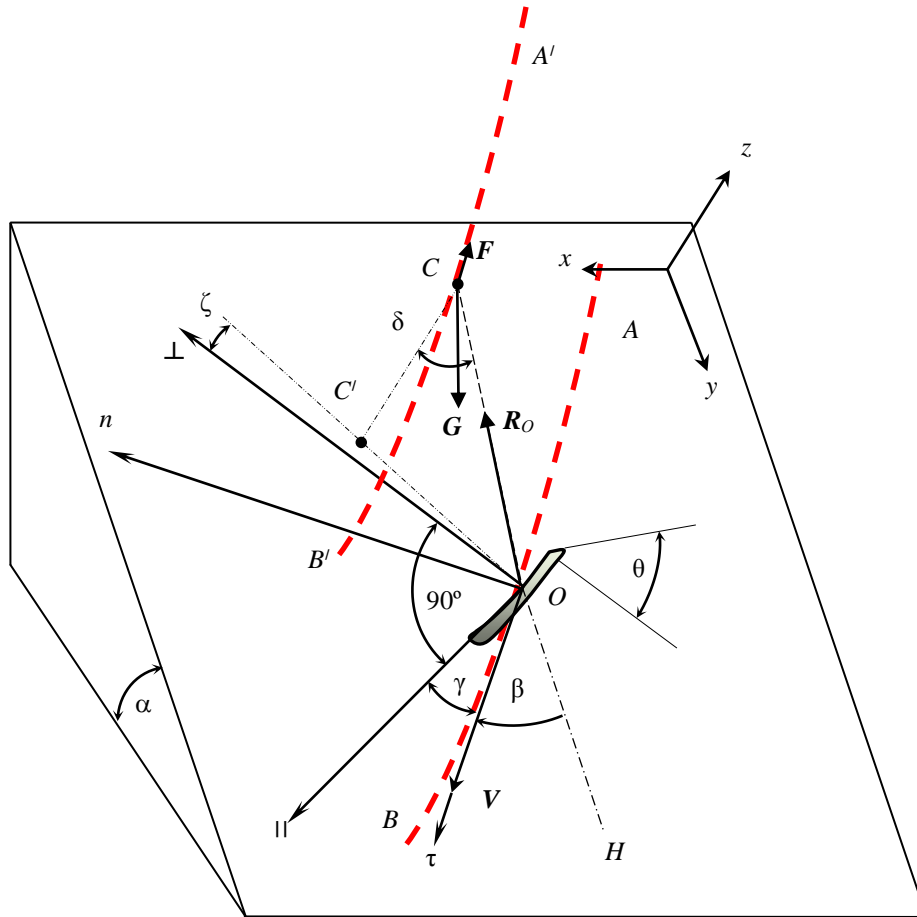


Рис. 3. Схема участка дуги  $AB$  поворота с проскальзыванием на плоском склоне крутизной  $\alpha$ .  $\Pi$  и  $\perp$  – ориентационное (вдоль лыжи) и перпендикулярное к нему направления;  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  – сила тяжести системы «лыжник–лыжи», приложенная к центру масс  $C$ ;  $O$  – опорная точка, или точка пересечения со склоном линии действия равнодействующей опорных реакций  $\mathbf{R}_O$ , в которой также располагается середина условной лыжи;  $C'$  – проекция центра масс на склон;  $CC'$  и ось  $z$  – нормали к склону;  $AB$  и  $A'B'$  – траектории опорной точки  $O$  и центра масс  $C$ ;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости;  $\tau$  и  $n$  – касательная и нормальная оси траектории движения опорной точки ( $\tau$ :  $O$ );  $\zeta$  – угол осадки, обусловленный наличием силы трения скольжения как компонента опорной реакции;  $OH$  и ось  $y$  – направления линий падения склона;  $\theta$  – угол закантовки, или угол между плоскостью склона и скользящей поверхностью лыжи

Как уже было показано, при выполнении условий динамического равновесия линия действия равнодействующей опорных реакций  $\mathbf{R}_O$  проходит через центр масс системы [3; 18]. Иными словами, вектор  $\mathbf{R}_O$  направлен по отрезку  $OC$ , соединяющему точку приложения равнодействующей опорных реакций (т.  $O$ ) и центр масс (т.  $C$ ) (рис. 3). Для простоты описания пренебрежем незначительными различиями между траекториями опорной точки ( $AB$ ) и центра масс ( $A'B'$ ). На рис. 4 показаны красным цветом проекции равнодействующей опорных реакций  $\mathbf{R}_O$  на плоскость склона ( $\mathbf{R}_{xy}$ ), и на ортогональные оси вдоль ориентационного направления лыжи ( $\mathbf{R}_{\Pi}$ ) и в поперечном направлении ( $\mathbf{R}_{\perp}$ ).

Введем следующие обозначения:  $\delta$  – угол между вектором равнодействующей опорных реакций  $\mathbf{R}_O$  и нормалью к склону (ось  $Oz$ ), или **угол наклона опорной линии**;  $\zeta$  – угол между проекцией  $\mathbf{R}_{xy}$  и направле-

нием поперечной оси ( $\perp$ ), или **угол осадки**;  $\alpha$  – угол падения склона, или **крутизна склона**.

Тогда модули компонентов реакции  $\mathbf{R}_O$  по осям ориентационной системы  $\Pi$ , ( $\perp$ ), и  $z$  будут:

$$\begin{aligned} R_{\Pi} &= R_O \sin \delta \sin \zeta = F_f; \\ R_{\perp} &= R_O \sin \delta \cos \zeta = F_c; \\ R_z &= R_O \cos \delta = N. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом силы аэродинамического сопротивления  $\mathbf{F}_d$ , которую для простоты приложим к точке  $C$  (рис. 3), движение центра масс будет определяться векторным уравнением:

$$m\mathbf{a}_c = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_O + \mathbf{F}_d, \quad (3)$$

а проекции векторного уравнения (3) на естественные оси  $\tau$ ,  $n$  и  $z$  будут:

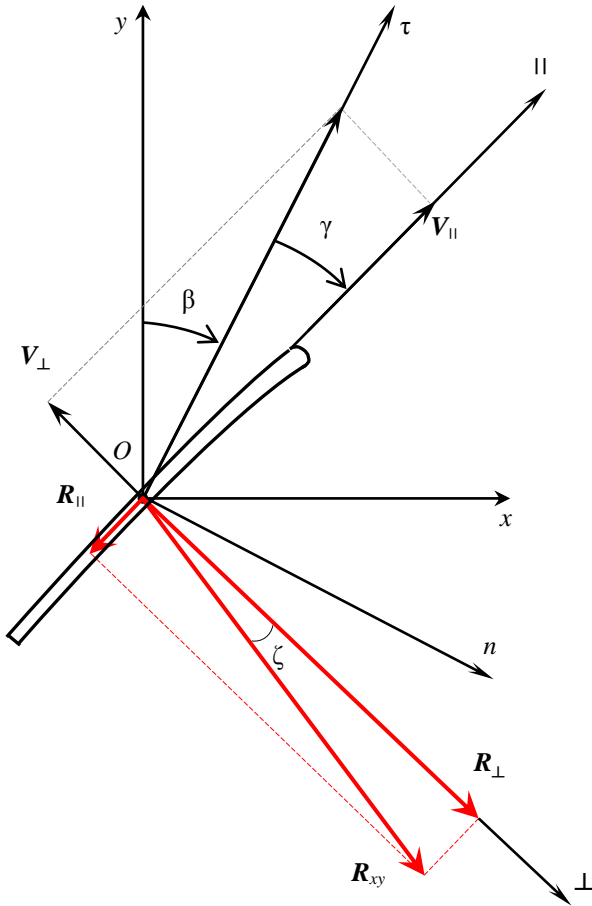


Рис. 4. Система сил при косом боковом скольжении

$$\begin{aligned} ma_{ct} &= mg \sin \alpha \cos \beta - R_{\parallel} \cos \gamma - R_{\perp} \sin \gamma - F_d; \\ ma_{cn} &= -mg \sin \alpha \sin \beta - R_{\parallel} \sin \gamma + R_{\perp} \cos \gamma; \\ ma_{cz} &= -mg \cos \alpha + R_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка выражений (2) в (4) дает:

$$\begin{aligned} ma_{ct} &= mg \sin \alpha \cos \beta - R_o \sin \delta \sin \zeta \cos \gamma - \\ &\quad - R_o \sin \delta \cos \zeta \sin \gamma - F_d; \\ ma_{cn} &= -mg \sin \alpha \sin \beta - R_o \sin \delta \sin \zeta \sin \gamma + \\ &\quad + R_o \sin \delta \cos \zeta \cos \gamma; \\ ma_{cz} &= -mg \cos \alpha + R_o \cos \delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Как показано в работе [1], в условиях равновесного поворота нормальная к склону компонента ускорения  $a_{cz}$  много меньше величины ускорения свободного падения  $g$ , что позволяет пренебречь  $a_{cz}$  и из третьего равенства в системе уравнений (5) получить:

$$R_o = mg \frac{\cos \alpha}{\cos \delta}. \quad (6)$$

Тогда подстановка (6) в первые два уравнения системы (5) после преобразования дает:

$$\begin{aligned} a_{ct} &= g \left[ \sin \alpha \cos \beta - \text{tg} \delta \cos \alpha \sin(\gamma + \zeta) \right] - \frac{F_d}{m}; \\ a_{cn} &= g \left[ -\sin \alpha \sin \beta + \text{tg} \delta \cos \alpha \cos(\gamma + \zeta) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

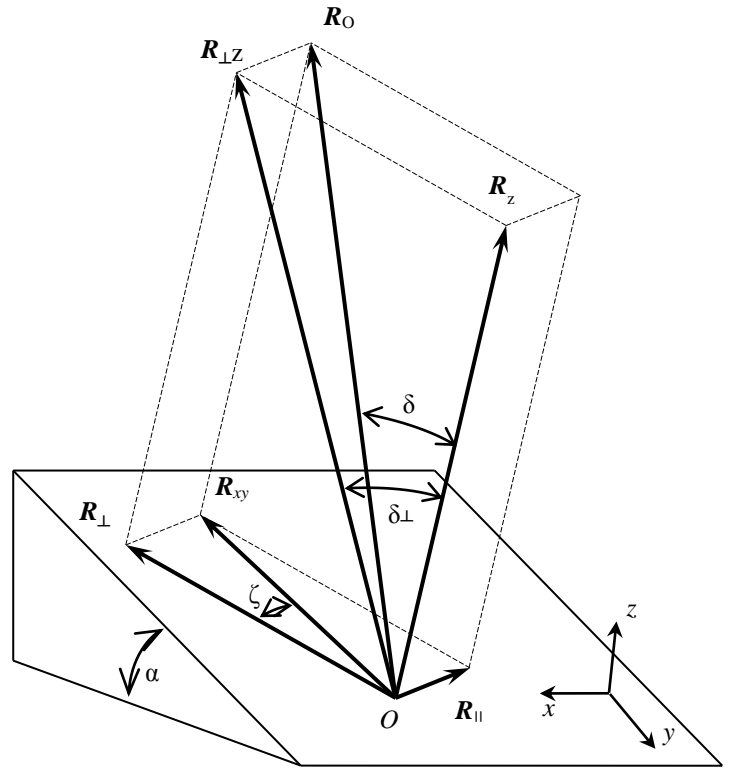


Рис.5. Геометрические соотношения между углами

Как следует из взаимного расположения ориентационных и естественных осей (рис.4), связь между рассмотренными естественными компонентами вектора ускорения и его компонентами в ориентационной системе определяется выражениями:

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= a_{ct} \cos \gamma + a_{cn} \sin \gamma; \\ a_{\perp} &= -a_{ct} \sin \gamma + a_{cn} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Подстановка (7) в (8) после преобразований дает:

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= g \left[ \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) - \text{tg} \delta \cos \alpha \sin \zeta \right] - \frac{F_d}{m} \cos \gamma; \\ a_{\perp} &= g \left[ \text{tg} \delta \cos \alpha \cos \zeta - \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) \right] + \frac{F_d}{m} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть, как мы уже предполагали, движение вдоль ориентационного направления лыж будет подчиняться алгоритму расчета, реализованному для случая отсутствия проскальзывания [18] (резаный поворот). При этом величина компонента ускорения, нормального к ориентационному направлению, определяется формулой:

$$a_{\perp} = \frac{V_{\parallel}^2}{\rho}, \quad (10)$$

где радиус кривизны  $\rho$  на участке траектории движения точки  $O$  в отсутствии бокового проскальзывания [11; 12], т.е. на «полочке» ступеньки, определяется радиу-

сом кривизны контактной линии лыжи со склоном. Считая, что при плоском (без кручения) прогибе лыжи точки боковой кромки лыж перемещаются по цилиндрической поверхности с радиусом бокового выреза, форма контактной линии соответствует пересечению этой цилиндрической поверхности и плоскости склона. В соответствии с теоремой Менье из дифференциальной геометрии [4], для твердой, недеформированной контактной поверхности радиус кривизны контактной линии лыжи со склоном определяется через радиус бокового выреза лыжи  $R$  и углом ее закатовки:

$$\rho = R \cos \theta. \quad (11)$$

Это согласуется с уравнением Хоу, сформулированным в работе [12] в 1983 году.

### Геометрические соотношения

Рассмотрим подробнее геометрические соотношения, связывающие пространственное направление опорной линии и ориентированной по ней опорную реакцию  $R_O$  с углом закатовки лыжи  $\theta$ .

Угол наклона  $\delta$  опорной линии в ориентационной системе отсчета определяется через отношение нормальной составляющей реакции к модулю полной реакции (рис. 5):

$$\delta = \arccos \frac{R_z}{\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2 + R_z^2}}, \quad (12)$$

а угол  $\delta_{\perp}$  между нормалью к склону ( $z$ ) и проекцией опорной линии на плоскость, перпендикулярную ориентационному направлению лыжи ( $z_{\parallel}$ ) определяется аналогичным образом:

$$\delta_{\perp} = \arccos \frac{R_z}{\sqrt{R_{\perp}^2 + R_z^2}} = \arccos \frac{R_O \cos \delta}{\sqrt{R_O^2 \sin^2 \delta \cos^2 \zeta + R_O^2 \cos^2 \delta}} = \arccos \frac{\cos \delta}{\sqrt{\sin^2 \delta \cos^2 \zeta + \cos^2 \delta}}. \quad (13)$$

Этот угол  $\delta_{\perp}$  в отсутствии ангуляции соответствует углу между скользящей поверхностью лыжи и склоном, или углу между их нормальями. Очевидно, что при малом трении угол осадки  $\zeta$  также мал, и  $\cos \zeta \approx 1$ , что позволяет считать углы  $\delta$  и  $\delta_{\perp}$  практически равными:  $\delta_{\perp} \approx \delta$ .

### Действующие силы

Оценим величину угла осадки  $\zeta$ . Кулоновская сила трения скольжения вдоль скорости определяется, как  $F_f = f \cdot N$ , причем коэффициент трения для правильно подготовленных лыж [9; 13] составляет  $f \leq 0,04$ . Используя (2), из рис. 5 получим:

$$\begin{aligned} \sin \zeta &= \frac{R_{\parallel}}{R_{xy}} = \frac{F_f}{R_O \sin \delta} = \frac{f N}{R_O \sin \delta} = \\ &= \frac{f R_O \cos \delta}{R_O \sin \delta} = \frac{f}{\operatorname{tg} \delta}; \\ \cos \zeta &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta - f^2}}{\operatorname{tg} \delta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим влияние силы аэродинамического сопротивления  $F_d$ . Как известно,  $F_d = 0,5 c_x \rho_h S V^2$ , где  $c_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $\rho_h$  – плотность воздуха на высоте  $h$  над уровнем моря,  $S$  – мидель,  $V$  – скорость. Это выражение можно написать в упрощенном виде:  $F_d = c V^2$ , где  $c$  – коэффициент пропорциональности, ориентировочное значение которого для спортсмена– горнолыжника, по данным [21], имеет величину  $c \approx 0,12$  кг/м.

Очевидно, что полная величина опорной реакции определяется нормальной к склону реакцией  $N = R_z = mg \cdot \cos \alpha$ , силой трения скольжения вдоль лыж (Кулоновская сила трения  $F_f = f \cdot N$ ) и силой сопротивления снега при боковом сносе, определенной в работе [16] с существенными приближениями, как  $F_c = N \cdot \operatorname{tg}(\theta - \tau)$ , где  $\tau = \arctg f$ . На рис. 6 показано сечение условной лыжи (которая описывает полную реакцию обеих лыж спортсмена) в поперечной плоскости, перпендикулярной ее продольной оси, выполняющей боковое скольжение по снежному насту трассы справа налево. При этом лыжа находится по отношению к поверхности склона под углом закатовки  $\theta$ . Компонентами силы реакции со стороны снежно-ледового наста на лыжу являются: нормальная к ее скользящей поверхности сила  $F_n$ , поперечный компонент  $F_{fp}$  силы трения от выбрасываемого из под лыжи вдоль ее скользящей поверхности (вверх и влево) срезаемого лыжей слое наста, продольный компонент силы трения  $F_f$  (ориентирован перпендикулярно плоскости рис. 6), а также сила  $F_{np}$ , действующая на боковую сторону лыжи вдоль опорной скользящей поверхности лыжи. Последний компонент должен присутствовать обязательно при выполнении лыжей чистого резаного поворота, когда сила трения со стороны наста направлена строго вдоль лыж, и поперечной своей составляющей не имеет. Очевидно, что сила  $F_{np}$  для этого случая – единственная, которая в состоянии препятствовать бесконечному внедрению лыжи в наст. Таким образом, сумма сил  $F_{np}$ ,  $F_{fp}$ ,  $F_f$  и  $F_n$  определяют реакцию склона  $R_O$ , которая в условиях динамического баланса сил направлена по опорному отрезку  $OC$  к центру масс системы. В этом случае поперечные компоненты реакции, как следует из рис. 5 и 6, определяются:

$$\begin{aligned} R_{\perp z} &= R_{\perp z} \sin \delta_{\perp} = R_O \sin \delta \cos \zeta, \\ F_{np} + F_{fp} &= R_{\perp z} \sin(\theta - \delta_{\perp}) \approx R_O \sin(\theta - \delta) = R_O \sin \varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\varphi$  – угол ангуляции. Здесь за малостью угла осадки принимается  $R_{\perp z} \approx R_O$  и  $\delta_{\perp} \approx \delta$ . Как видно из второго

уравнения в (15), поперечные компоненты реакции вдоль скользящей поверхности лыжи определяются ангуляцией лыжника.

Рассмотрим подробнее вопрос о значении силы сопротивления снега при боковом сносе. Еще раз перечислим основные позиции ступенькообразного движения в скользящем повороте. Как было сказано во введении, при таком повороте происходит неконтролируемое переключение от резаного движения на ступеньке к боковому скольжению в заносе. В таком повороте может приходиться несколько ступенек на каждую секунду движения. Очевидно, что силы боковой реакции снега на лыжу при резаном движении и боковом скольжении принципиально отличаются. На каждую из лыж приходится не вся, а только часть динамического давления со стороны лыжника. Соотношения времени движения в каждом из этих видов движения нам неизвестны – количественные оценки отсутствуют, и они могут сильно отличаться друг от друга, как у разных лыжников, так и у внешней и внутренней лыж одного лыжника. Наличие всех этих позиций означает, что при таком движении, строго говоря, не выполняются условия относительного (динамического) равновесия.

Однако нарушение положения относительного равновесия при переходе со ступеньки в боковое скольжение и обратно происходит весьма быстро и на небольшую величину. При этом опорная точка (точка приложения равнодействующей опорных реакций) может быстро перемещаться между ботинками лыжника, но на величину, не превышающую шага ступеньки, т.е. в пределах нескольких сантиметров. Так, после бокового скольжения при начале движения лыжи вдоль ступеньки центр масс спортсмена продолжает двигаться вдоль лыж и наружу поворота. При быстром переходе со ступеньки в скольжение наружу поворота центр масс еще продолжает двигаться вдоль ступеньки, тем самым отклоняясь к центру поворота. Быстрая комбинация этих двух переходов приводит к последовательным небольшим поперечным смещениям центра масс наружу и к центру поворота. Естественная реакция лыжника на такое поведение лыж заключается в некотором увеличении поперечного расстояния между лыжами, что позволяет сохранять ему общее равновесие (баланс) в повороте. За счет того, что смещение центра масс лыжника наружу и к центру поворота происходит на небольшие величины, будем считать, что положение лыжника мало отклоняется от положения относительного динамического равновесия при чистом продольно-боковом скольжении без ступенек. Тогда, используя усредненные значения силы боковой реакции снега, движение центра масс лыжника будет осуществляться практически по той же траектории, что и при мгновенных, текущих, меняющихся боковых силах. Такая замена позволяет описать положение лыжника в скользящем повороте с вибрацией, используя не мгновенное, а **усредненное** за один цикл «боковое скольжение – резаное движение на полочке» значение силы сопротивления снега при боковом сносе  $F_c$ .

Усредненная сила сопротивления снега при боковом сносе является компонентой равновесной реакции склона по направлению оси  $\perp$ :  $F_c = R_{\perp}$ , или, учитывая (6):

$$F_c = R_{\perp} = mg \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \cos \zeta. \quad (16)$$

Это выражение мы примем за усредненное значение боковой реакции склона, и оно отличается от приведенного в [16], которое после подстановки нормальной к склону реакции ( $N = mg \cos \alpha$ ) можно выразить как  $F_c = mg \cos \alpha \operatorname{tg}(\theta - \tau)$ . Как уже обсуждалось, мгновенное значение боковой реакции склона зависит от текущей нагрузки на лыжу, а среднее ее значение – это интеграл по времени ее действия в цикле «ступенька – скольжение», продолжительность времени которого мы не оценивали. Силу  $F_c$  из [16] нельзя выразить как компоненту сбалансированной реакции  $R_o$ , т.к. очевидно, что  $\operatorname{tg}(\theta - \tau)$  всегда несколько больше, чем  $\operatorname{tg} \delta \cos \zeta$ , поскольку  $\theta = \delta + \varphi$ . Угол ангуляции  $\varphi$  может меняться от 0 до 30° [2], поэтому разница между углами  $\theta$  и  $\delta$  существенная. Помимо этого, используя силу трения при боковом сносе из [15] в совокупности с силой трения, невозможно объяснить наличие дополнительной реакции  $F_{fp}$  на лыжу, описываемой вторым уравнением в (15). Поэтому в дальнейшем для оценки силы сопротивления снега при боковом сносе будем использовать формулу (16) для ее усредненного значения при равновесном движении, позволяющую положительно ответить на оба поставленных здесь вопроса.

Используя дифференциальный и интегральный подходы, нами получены интегральные выражения (см. приложение), позволяющие оценить количественно параметры поворота с боковым проскальзыванием в зависимости от угла движения  $\beta$ , либо от текущего времени движения  $t$  в повороте. Оценка проводилась для безразмерных параметров движения, которые маркировались знаком «тильда» в отличие от их размерных аналогов. Это: угол наклона опорной линии, угол скольжения (атаки), ангуляция, угол закантовки, радиус кривизны траектории центра масс, скорость движения центра масс, ее продольная и поперечная составляющие, а также координаты и траектория движения центра масс в плоскости склона.

Для однозначного определения значений углов наклона опорной линии  $\delta$  и ангуляции  $\varphi$  необходимо задать индивидуальную стилевую ангуляционную функцию [18] вида:

$$\varphi = \eta \cdot \psi(\delta). \quad (17)$$

Здесь:  $\psi(\delta)$  – предельное значение угла ангуляции, обусловленное анатомическими возможностями лыжника,  $\eta$  – степень ангуляции, характеризующая отношение величины угла ангуляции к его предельному значению для рассматриваемого угла наклона  $\delta$  опорной линии [2]. Тогда эти углы находятся при совместном решении

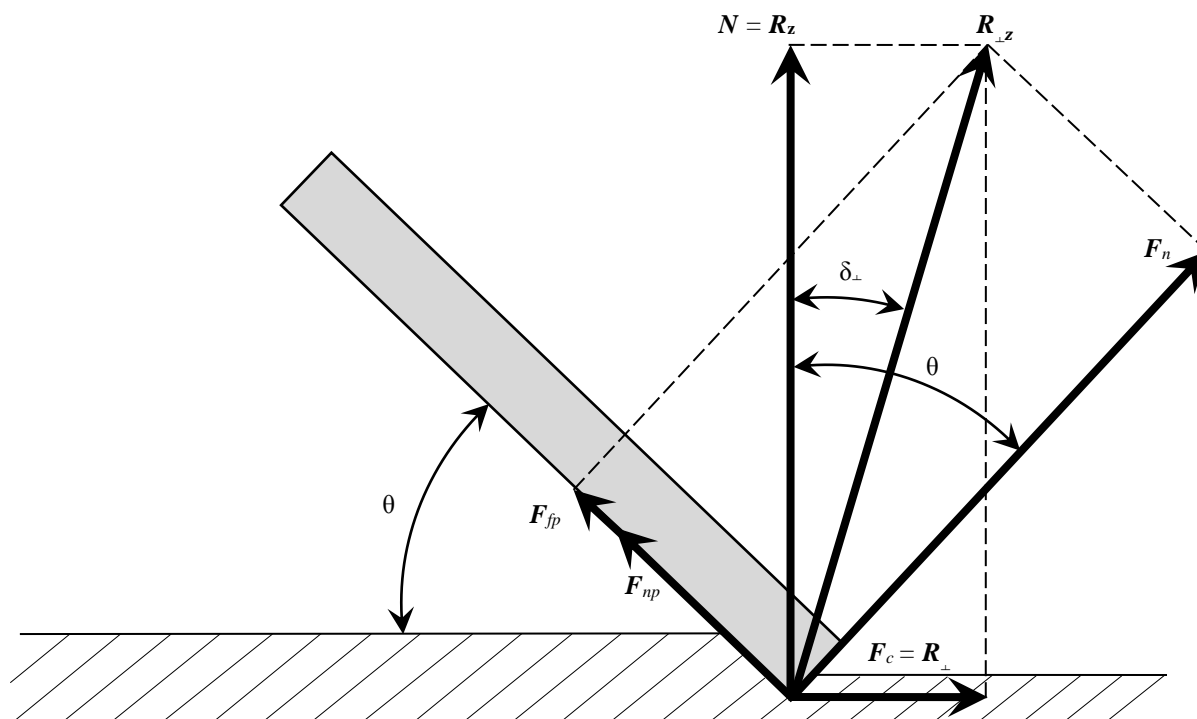


Рис. 6. Схема сил при боковом скольжении лыжи

уравнений (17) и (40) на каждом шаге интегрирования. Величина угла  $\delta$  с учетом связи  $\varphi(\delta)$  зависит от значений  $\dot{V}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , что позволяет оценить угол закантовки  $\theta$  для текущих кинематических параметров движения.

### Примеры расчета параметров поворота с боковым проскальзыванием для прогрессивной ангуляционной функции

При численном интегрировании системы интегральных уравнений (правые части уравнений (36, 38) и (41) в приложении) выбрана так называемая «прогрессивная» ангуляционная функция, описанная в работе [18]. Прогрессивная ангуляция применяется, в том числе, с целью сохранения во фронтальной плоскости близкого к нормальному по отношению к склону положения верхней части тела. При задании прогрессивной ангуляции, в соответствии с полученными экспериментальными значениями [2], для нулевого угла наклона степень ангуляции равна  $\eta_0 = 0,35$ , далее увеличивается линейно вплоть до значения  $\eta_1 = 0,9$  для угла  $\delta_1 = 50^\circ$ , затем степень ангуляции вплоть до максимального угла наклона  $\delta_2 = 65^\circ$  сохраняется неизменной. Как уже было сказано, угол наклона опорной линии  $\delta$ , угол ангуляции  $\varphi$  и угол закантовки  $\theta$  находятся при совместном решении уравнений (39) и (17) на каждом шаге интегрирования.

На приведенных ниже графиках (рис. 7–17) показаны рассчитанные по представленной модели зависимости от угла движения и от времени изменения некоторых кинематических параметров движения центра масс системы «лыжник–лыжи» для скользящих поворотов с постоянным углом скольжения (кривые черного цвета),

с углом скольжения, линейно уменьшающемся до нуля к концу поворота (кривые синего цвета) и с углом скольжения, линейно уменьшающемся до половины своей начальной величины к концу поворота (кривые красного цвета). Размерности приведенных угловых параметров – градусы. Численные значения размерных параметров, входящих в описывающие модель движения расчетные уравнения, приняты следующими: радиус бокового выреза лыжи  $R = 35$  м (лыжи для слалома – гиганта), коэффициент пропорциональности для силы аэродинамического сопротивления  $c = 0,12$  кг/м, коэффициент трения лыжи о снег  $f = 0,04$ , крутизна склона  $\alpha = 20^\circ$ , начальные и конечные углы движения  $\beta$  в повороте, соответственно  $-60^\circ$  и  $60^\circ$ , начальные углы скольжения (атаки)  $\gamma_0 = 20^\circ$ . Во всех приведенных на графиках кривых начальная безразмерная скорость движения составляла  $\dot{V}_0 = 0,8$ , величина которой близка к предельной для обеспечения равновесного поворота на склоне крутизной  $20^\circ$  с углом скольжения, линейно уменьшающемся до нуля к концу поворота. Попытка просчитать параметры чисто резаного поворота по разработанной математической модели показала нарушение условий равновесия, что иллюстрирует невозможность его выполнения для выбранных начальных условий движения.

Как следует из графиков на рис. 8 и 17, из рассматриваемых поворотов самым быстрым и коротким по протяженности является скользящий поворот с углом скольжения, линейно уменьшающемся до нуля к концу поворота (голубые линии), что подтверждается практикой его применения спортсменами высшей категории [21; 22]. В этих работах проводилось тестирование спортсменов с использованием системы датчиков и показано, что типичный спортивный поворот в слаломе



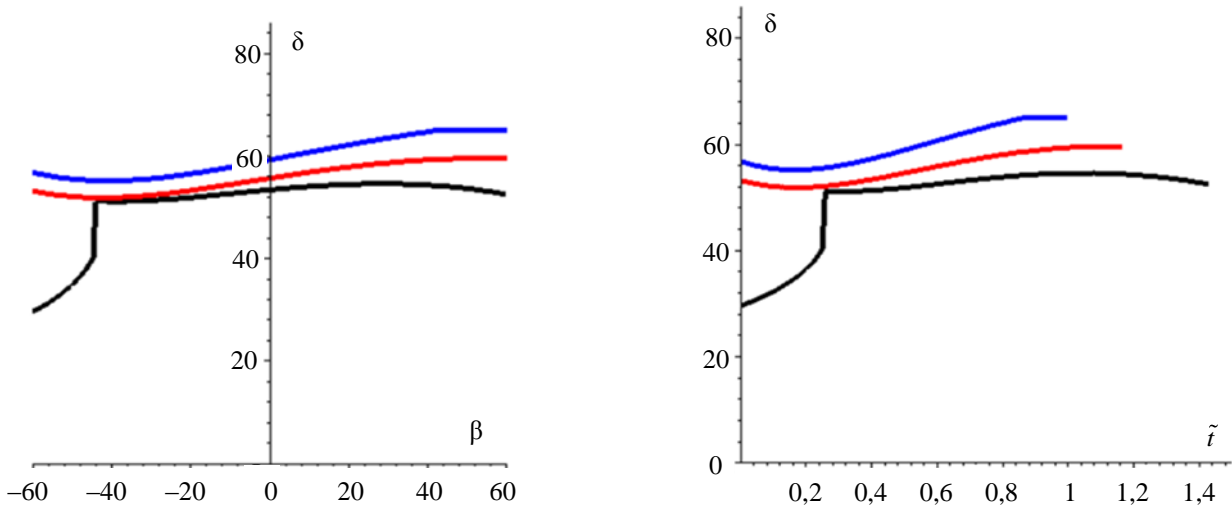


Рис. 7. Угол наклона опорной линии  $\delta$  как функция от угла движения  $\beta$  при повороте и безразмерного времени  $\tilde{t}$

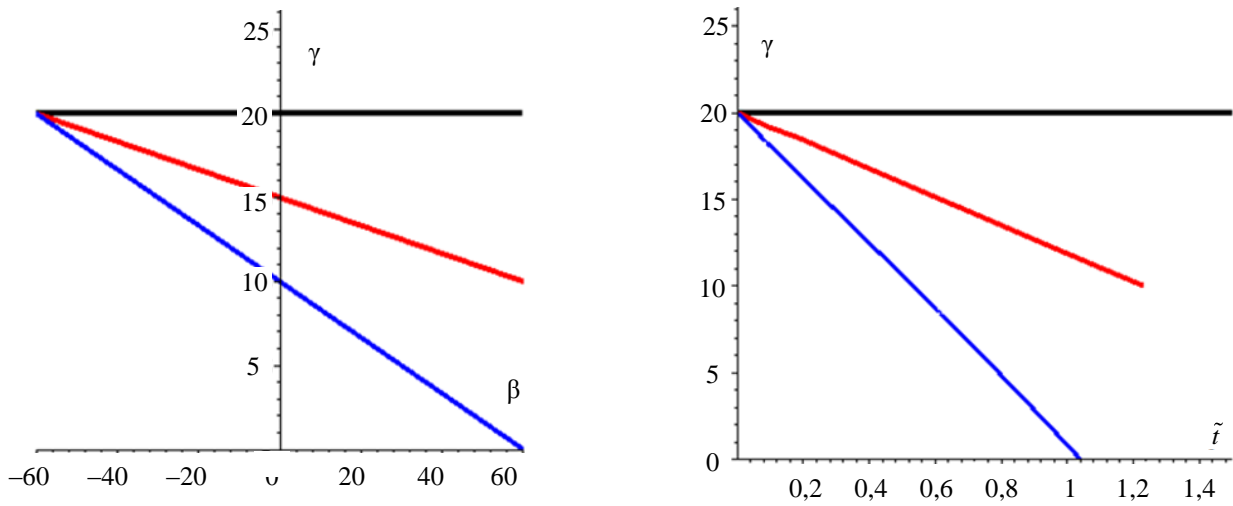


Рис. 8. Угол скольжения  $\gamma$  как функция от угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

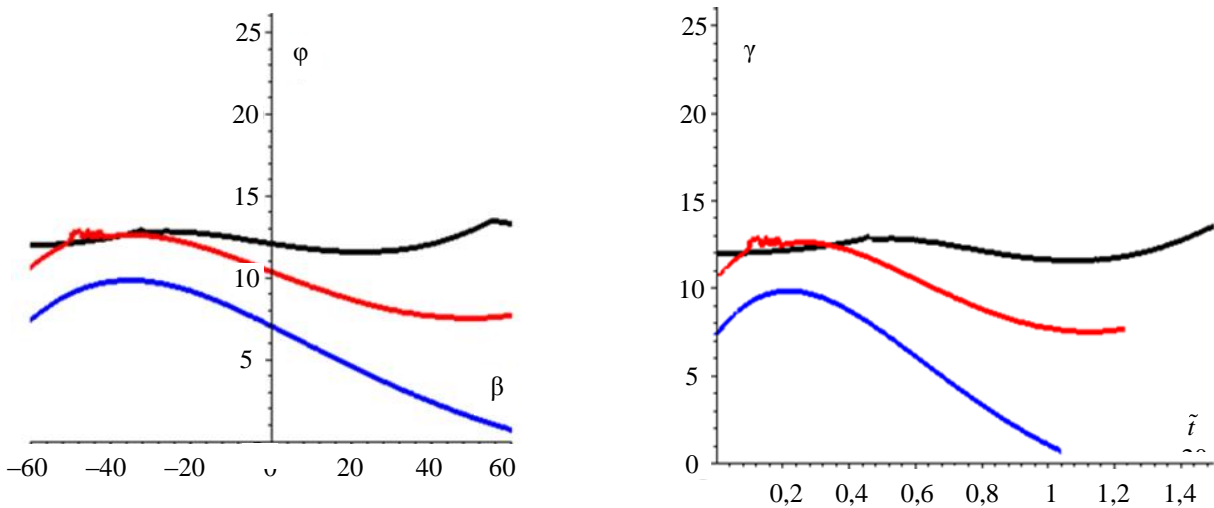


Рис. 9. Ангуляция  $\phi$  как функция от угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

начинается с заноса (бокового скольжения со значительными углами атаки) и заканчивается резаным скольжением. Самым медленным и длинным по протяженности оказался скользящий поворот с постоянным

углом скольжения (кривые черного цвета). С этими результатами согласуется и характер изменения в повороте скорости движения, включая ее продольную и поперечную составляющие (рис. 14–16). Изменение углов

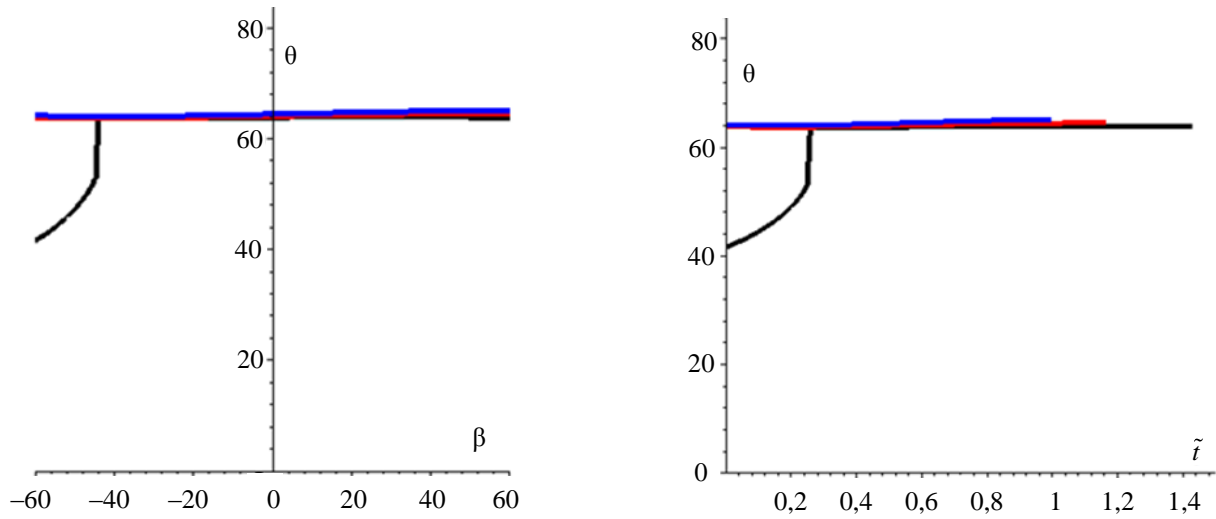


Рис. 10. Угол закантовки лыж  $\theta$  как функция угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

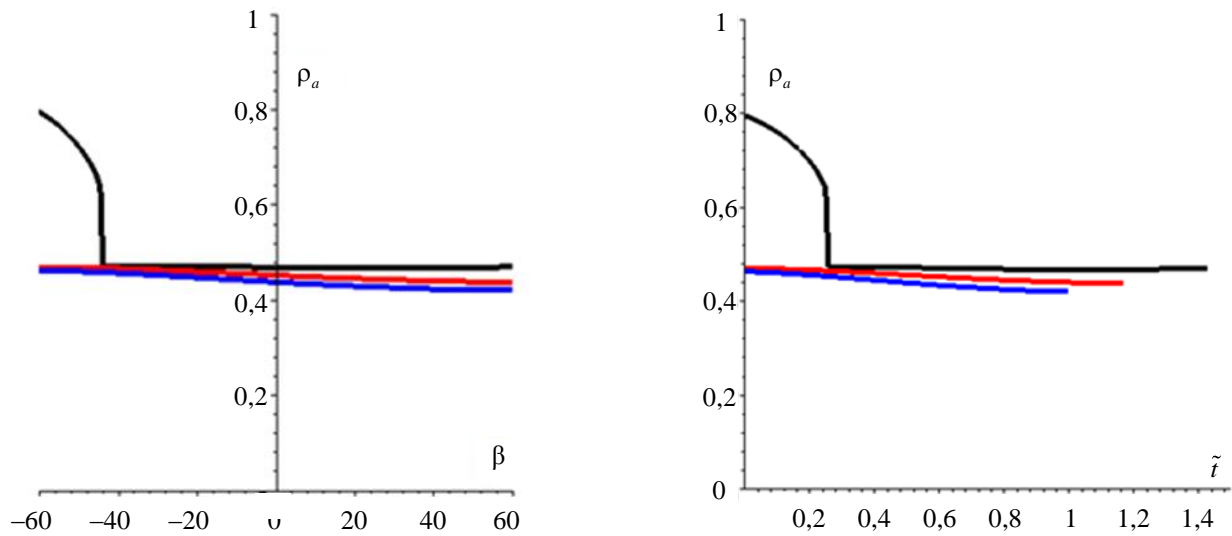


Рис. 11. Радиус кривизны траектории  $\rho$  центра масс как функция угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

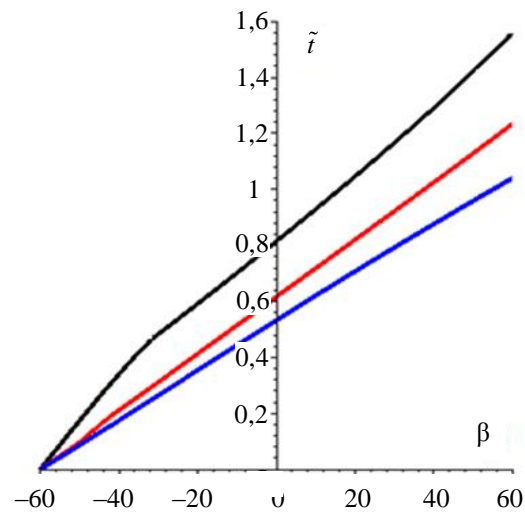


Рис. 12. Безразмерное время  $\tilde{t}$  движения как функция угла движения  $\beta$

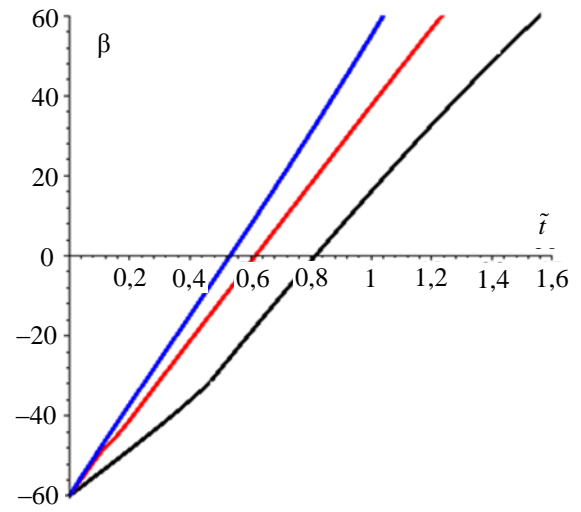


Рис. 13. Угол движения как функция безразмерного времени  $\tilde{t}$

наклона опорной линии, ангуляции и закантовки в скользящем повороте, в соответствии с выбранной прогрессивной ангуляционной функцией, показаны на

рис. 7, 9, 10. Как видно из графиков на рис. 10, угол закантовки на протяжении всего поворота при выборе прогрессивной ангуляционной функции практически

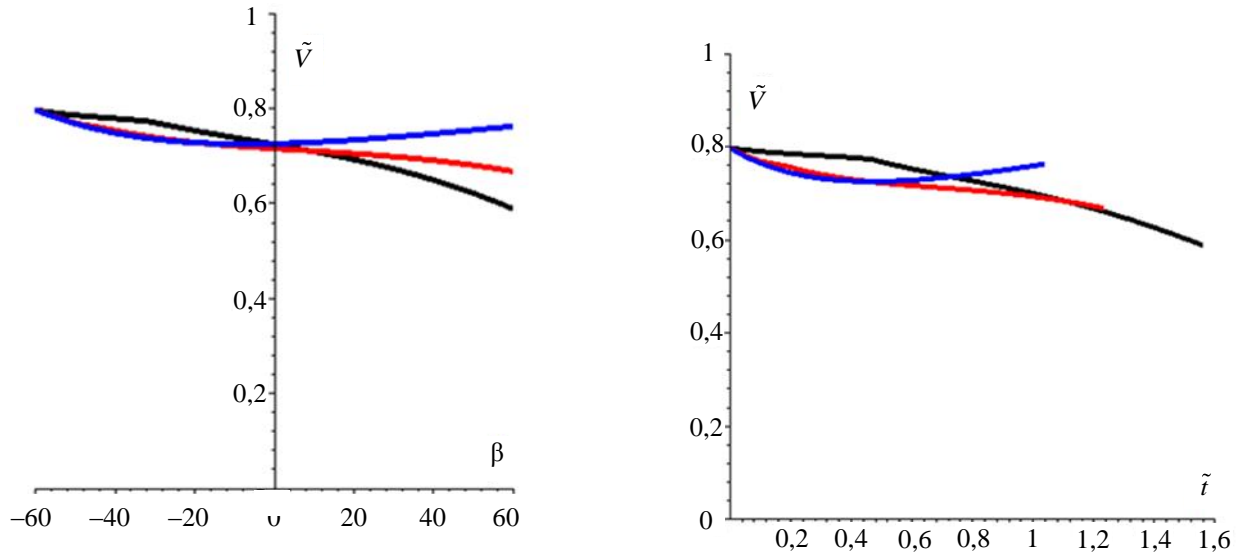


Рис. 14. Безразмерная скорость  $\tilde{V}$  центра масс как функция угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

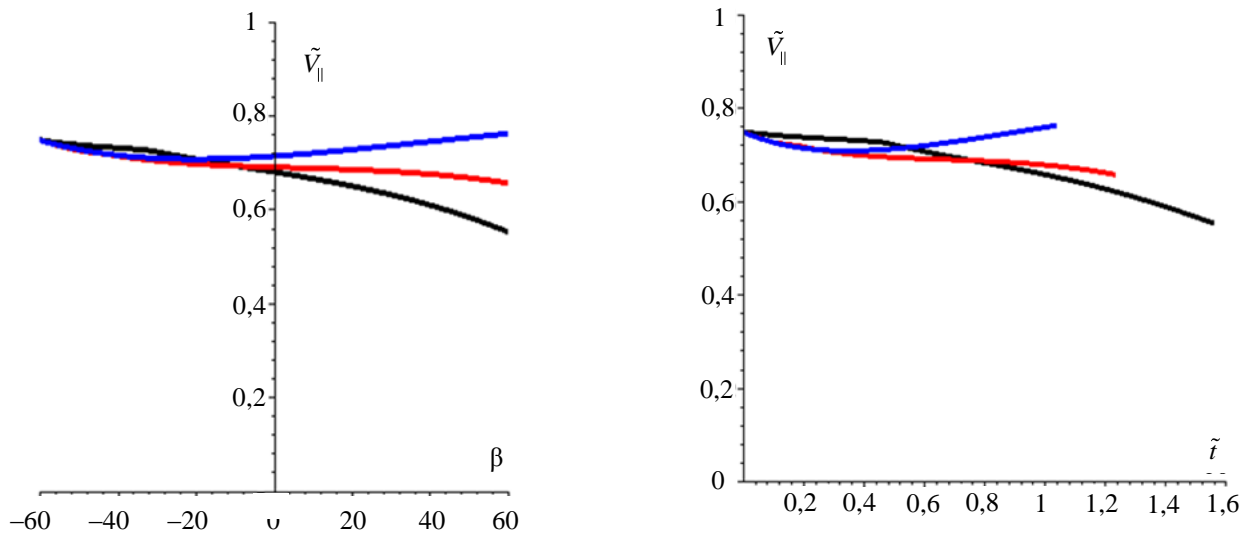


Рис. 15. Продольная составляющая  $\tilde{V}_{\parallel}$  безразмерной скорости как функция угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

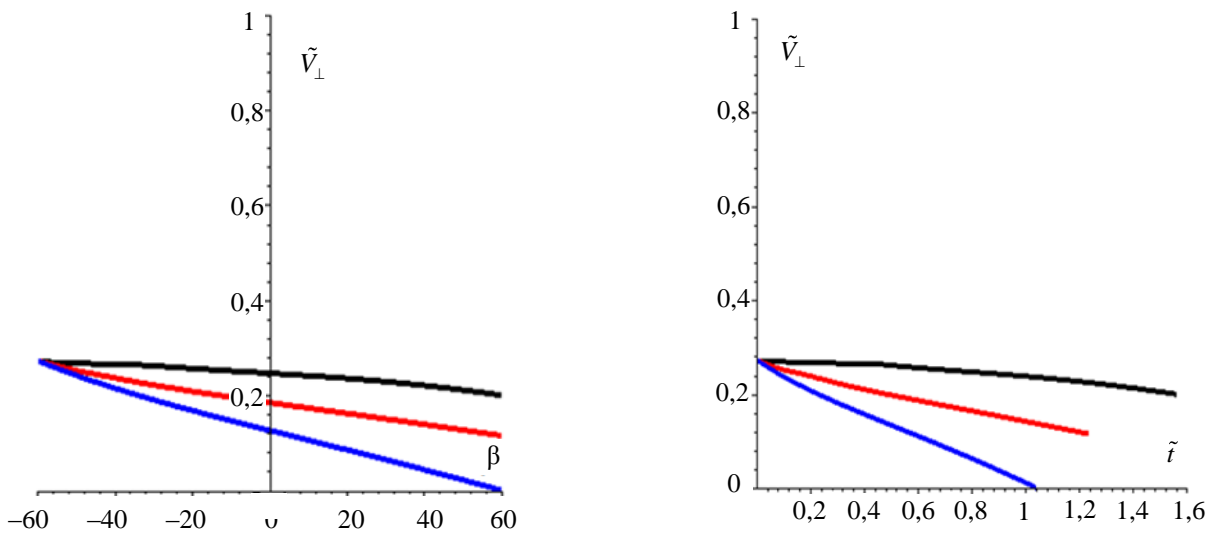


Рис. 16. Поперечная составляющая  $\tilde{V}_{\perp}$  безразмерной скорости как функция угла движения  $\beta$  и безразмерного времени  $\tilde{t}$

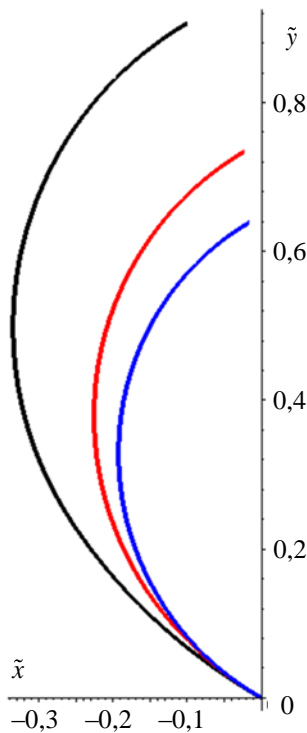


Рис. 17. Траектория движения центра масс в безразмерных координатах

остаётся неизменным, что согласуется с мало меняющимся значением радиуса кривизны траектории (рис. 11). Этот результат снова коррелирует с измеренными изменениями угла закантовки на этапе ведения дуги у элитных лыжников [21; 22]. Следует отметить, что характерные изломы кривых черного цвета на графиках (рис. 7, 10 и 11) связаны с изменением характера ангуляции с прогрессивной на пропорциональную в соответствии с экспериментальной зависимостью предельной ангуляции, описываемой в работах [2; 18].

## Обсуждение

Как показано в работе [22], углы закантовки и скольжения (атаки), используемые в теоретических моделях механики взаимодействия лыж и снега, далеко не всегда являются точными, исчерпывающими характеристиками. С точки зрения практиков лыжа описывается либо как скользящая, либо как карвинговая. Однако за счет податливости, поперечного изгиба и продольного кручения лыжи при ее контакте со склоном, а также за счет деформации опорной поверхности склона такая классификация является чрезмерным упрощением, поскольку и резаное, и боковое скольжение могут происходить одновременно на разных отрезках длины лыжи. Используемые в настоящей работе угловые параметры мы относили ко всей лыжи в целом, поскольку тематика представленного материала представляет собой попытку развить теоретическую модель в новом, еще плохо исследованном направлении. Учет распределение локальных углов закантовки и скольжения по

длине лыжи, вообще говоря, должен иметь место и в представленной математической модели, но это – тема отдельного исследования.

Как уже отмечалось, физика формирования ступенькообразного движения лыжи в скользящем повороте с вибрацией еще до конца не изучена. Понимание причин такого поведения лыж очень важно не только с позиции корректного моделирования механики движения, но и с точки зрения обеспечения безопасного, нетравматичного скольжения на горных лыжах [8]. Некоторые исследования, (например, работа [10]) связывают это явление с вибрацией лыж, находящихся в скользящем контакте с поверхностью склона, включая изгибные и крутильные колебания. Однако прямая связь этих явлений друг с другом до сих пор не описана.

В данной работе во введении в качестве рабочей гипотезы принималось предположение, что характер движения лыж при скользящем повороте с вибрацией не зависит от шага ступенек, по которым перемещается лыжа при таком движении. Если перейти к случаю, при котором шаг ступенек стремится к нулю, получится, что и боковое скольжение без вибрации – результат предельного перехода вибрационного бокового скольжения. А это означает, что любые виды бокового скольжения лыж могут быть описаны рассмотренным механизмом и оценены разработанной численной моделью. Правильность или неправильность применения представленной модели для случая отсутствия вибрации при боковом скольжении могут быть выявлены при сравнении результатов подсчета по модели с реальным движением горнолыжника в дуге поворота. Это является отдельным экспериментальным материалом, требующим самостоятельной, тщательной работы, которую авторы запланировали в будущем. Однако уже сейчас ясно, что в том случае, если оценки движения по разработанной модели будут адекватны реальному повороту и при отсутствии вибрации лыж, разработанный алгоритм расчета можно будет применять для любого горнолыжного поворота, начиная от чистого карвинга до управляемого заноса.

## Заключение

Разработана модель равновесного движения лыжника в горнолыжном повороте с проскальзыванием и вибрацией лыж. Поворот рассмотрен в общем виде, с ангуляцией, как способе увеличения угла закантовки лыж. Сформулирована система интегральных уравнений движения, позволяющая определить кинематические параметры движения механической системы «лыжник–лыжи», используя задаваемый лыжником закон изменения угла скольжения. Численно оцениваются скорость движения центра масс, ее продольные и поперечные составляющие, траектория движения центра масс и радиус ее кривизны, углы наклона опорной линии, ангуляции, закантовки, время движения в повороте. Решение задачи проиллюстрировано примерами с

различными законами изменения угла скольжения при учете силы трения скольжения и аэродинамического сопротивления. Предложенная аналитическая модель позволяет выполнять количественные оценки параметров скользящего поворота с вибрацией при различных

стилях управления ангуляцией и законах изменения угла скольжения, и может быть использована в работе тренеров по горнолыжной подготовке, а также при разработке новых моделей лыж и спортивных тренажеров.

## Список литературы

1. Леготин С.Д., Обносков К.Б., Ривлин А.А. Учет изменения нормальной составляющей реакции склона в математической модели равновесного горнолыжного поворота // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2021. – Вып. 3. – С. 45–49. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2067
2. Леготин С.Д., Ривлин А.А. Оценка предельных углов ангуляции спортсмена-горнолыжника с использованием разработанного специализированного антропометрического стенда // Экстремальная деятельность человека. – 2018. – Т. 49, № 3. – С. 27–31.
3. Леготин С.Д., Ривлин А.А., Данилин В.И. Механика горных лыж: резаный поворот без ангуляции // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – Вып. 7. – С. 1–15. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1632
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
5. Рудаков Р.Н., Гайсина А.Р., Лисовский А.Ф., Разумов А.А. Оптимизация траектории центра масс горнолыжника в специальном слаломе, слаломе-гиганте и супер-гиганте. – 2004. – Т. 8, № 2. – С. 12–18.
6. Рудаков Р.Н., Лисовский А.Ф., Гайсина А.Р., Хитрюк В.В. Оптимизация слаломной траектории на криволинейном склоне // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 2. – С. 53–61.
7. Рудаков Р.Н., Разумов А.А., Лисовский А.Ф., Подгаец Р.М. Оптимизация слаломной траектории с учетом наклона лыжника // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 85–90.
8. Bere T., Florenes T.W., Krosshaug T., Koga H., Nordsletten L., Irving C., Irving C., Muller E., Reid R.C., Senner V., Bahr R. Mechanisms of anterior cruciate ligament injury in World Cup alpine skiing: a systematic video analysis of 20 cases // Am. J. SportsMed. – 2011. – Vol. 39, no. 7. – P. 1421–1429. DOI: 10.1177/0363546511405147
9. Colbeck S. A review of the processes that control snow friction, available at: <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA252362> (accessed: 20 May 2022).
10. Gosselin P., Truong J., Chapdelaine C., Guilbert J.-S., St-Pierre E., Trahan X., Desbiens A. Effect of edged snow contact on the vibration of alpine skis // Sports Engineering. – 2021. – Vol. 24. – Article no. 26. DOI: 10.1007/s12283-021-00363-0
11. Hirano Y. Quickest descent line during alpine ski racing // Sports Engineering. – 2006. – Vol. 9, no. 4. – P. 221–228. DOI: 10.1007/BF02866060
12. Howe J. Skiing mechanics. – Laporte: Poudre Press, 1983. – 168 p.
13. Kietzig A.M., Hatzikiriakos S., Englezos P. Physics of ice friction // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol. 197, no. 8. – P. 081101–081101-15. DOI: 10.1063/1.3340792
14. Komissarov S.S. Balanced carving turns in alpine skiing // Sports Biomechanics. – 2020. DOI: 10.1080/14763141.2020.1795236
15. Komissarov S.S. Mechanics of side-slipping in alpine skiing. Braking and skidded traversing // Sports Engineering. – 2021. – Vol. 24. – Article no. 20. DOI: 10.1007/s12283-021-00357-y
16. Komissarov S.S. Mechanics of side-slipping in alpine skiing: theory of machining snow and ice // Sports Engineering. – 2021. – Vol. 24. – Article no. 4. DOI: 10.1007/s12283-021-00340-7
17. Legotin S.D., Rivlin A.A. Mechanics of stability's loss in the skiing turning // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). – 2019. – Vol. 1301, no. 1. – Article no. 012020. DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012020
18. Legotin S.D., Rivlin A.A., Obnosov K.B. Mechanics of alpine skiing: carve turn with angulation // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). – 2020. – Vol. 1705, no. 1. – Article no. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1705/1/012034
19. Lind D., Sanders S. The physics of skiing: skiing at the triple point. – 2 ed. – New York: Springer-Verlag, 1996. – 270 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4345-6
20. Nordt A., Springer G., Kollar, L. Simulation of a turn on alpine skis // Sports Engineering – 1999. – Vol. 2. – P. 181–199. DOI: <https://doi.org/10.1046/j.1460-2687.1999.00027.x>
21. Reid R. A kinematic and kinetic study of alpine skiing technique in slalom. Ph.D. dissertation. – Norgesidrettshøgskole, 2010. – 406 p.
22. Reid R., Haugen P., Gilgien M., Kipp R., Smith G. Alpine ski motion characteristics in slalom // Frontiers in Sports and Active Living. – 2020. – Vol. 2. – Article no. 25. DOI: 10.3389/fspor.2020.00025
23. Tada N., Hirano Y. In search of the mechanics of a turning alpine ski using snow cutting force measurements // Sports Engineering – 2002. – Vol. 5. – P. 15–22. DOI: 10.1046/j.1460-2687.2002.00092.x

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Интегральные выражения

Поскольку угол закантовки лыжи [17] включает в себя угол наклона опорной линии  $\delta$  и дополнительный угол  $\varphi$ , обусловленный ангуляцией лыжника ( $\theta = \delta + \varphi$ ), выражение (10) с учетом (11) приобретает вид:

$$a_{\perp} = \frac{V_{\parallel}^2}{R \cos(\delta + \varphi)}. \quad (18)$$

Элемент дугообразной траектории движения точки  $O$  на участке движения без бокового проскальзывания (на «полочке» ступеньки) определяется скоростью движения лыж вдоль их ориентационного направления, радиусом кривизны дуги контактной линии лыжи со склоном (11) и элементарным изменением ориентационного угла:

$$dS_{\parallel} = V_{\parallel} dt = \rho d\chi, \quad (19)$$

или, после подстановки (1) и (11):

$$V \cos \gamma dt = R \cos \theta d\chi. \quad (20)$$

Элементарное изменение ориентационного угла  $\chi$  равно:

$$d\chi = d(\beta + \gamma) = d\beta + d\gamma, \quad (21)$$

Угол скольжения  $\gamma$  создается лыжником в связи с необходимостью снизить скорость движения, изменить радиус поворота, скорректировать траекторию движения по трассе и пр., поэтому в общем случае можно принять эту характеристику как функцию, зависящую от скорости движения ( $V$ ), фазы поворота ( $\beta$ ), крутизны склона ( $\alpha$ ) и общего характера трассы ( $R$ ):  $\gamma = \gamma(V, \beta, \alpha, R)$ . Тогда (21) приобретет вид:

$$d\chi = d\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} d\beta = \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\right) d\beta = \Gamma(\beta) d\beta, \quad (22)$$

где  $\Gamma(\beta) = 1 + \partial \gamma / \partial \beta$  – поправочный коэффициент, учитывающий вклад изменения угла скольжения (атаки) в изменение ориентационного угла. Тогда после подстановки из (20), можно получить:

$$dt = \frac{R \cos \theta}{V \cos \gamma} \Gamma(\beta) d\beta. \quad (23)$$

Наличие коэффициента  $\Gamma(\beta)$  в выражении (23) означает, что для монотонности функций  $t$  и  $\beta$  производная  $\partial \gamma / \partial \beta$  не может иметь скачкообразные изменения, что накладывает определенные ограничения на реализуемую лыжником управляемую функцию  $\gamma(\beta)$ .

Умножив первое выражение в (1) на дифференциал времени  $dt$ , получим связь между элементом дуги ( $ds = Vdt$ ) траектории движения точки  $O$  по склону и элементом дуги на «полочке» скольжения лыжи по своему ориентационному направлению ( $ds_{\parallel} = V_{\parallel} dt$ ):

$$ds_{\parallel} = ds \cos \gamma. \quad (24)$$

Длину элемента дуги  $ds$  общей траектории движения точки  $O$  выразим через ее радиус кривизны (абсолютный радиус кривизны  $\rho_a$ ) и элементарные изменением угла движения:

$$ds = \rho_a d\beta. \quad (25)$$

Учитывая (19) и (22):  $\rho \Gamma(\beta) d\beta = \rho_a \cos \gamma d\beta$ , откуда радиус кривизны:

$$\rho_a = \rho \Gamma(\beta) \cos^{-1} \gamma. \quad (26)$$

Тогда выражение (25) приобретет вид:

$$ds = \rho \Gamma(\beta) \cos^{-1} \gamma d\beta, \quad (27)$$

а элементарные перемещения по координатам:

$$\begin{aligned} dx &= \rho \Gamma(\beta) \cos^{-1} \gamma \sin \beta d\beta, \\ dy &= \rho \Gamma(\beta) \cos^{-1} \gamma \cos \beta d\beta. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя (9) и (23), и учитывая, что скорость бокового скольжения  $V_{\perp}$  направлена наружу поворота, можно получить выражения для приращений скоростей в виде:

$$\begin{aligned} dV_{\parallel} &= a_{\parallel} dt = \frac{Rg \cos \theta}{V \cos \gamma} \left[ \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \sin \zeta - \frac{F_d}{mg} \cos \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta, \\ dV_{\perp} &= -a_{\perp} dt = -\frac{Rg \cos \theta}{V \cos \gamma} \left[ \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) + \frac{F_d}{mg} \sin \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения (29) после подстановки (14) запишем так:

$$\begin{aligned} dV_{\parallel} &= \frac{Rg \cos \theta}{V \cos \gamma} \left[ \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg} \cos \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta, \\ dV_{\perp} &= \frac{Rg \cos \theta}{V \cos \gamma} \left[ \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta - f^2} \cos \alpha - \frac{F_d}{mg} \sin \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (30)$$

Перенеся в левую часть равенств (30) знаменатели первых дробей из правых частей и, учитывая (1), получим:

$$\begin{aligned} V_{\parallel} dV_{\parallel} &= Rg \cos \theta \left[ \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg} \cos \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta, \\ V_{\perp} dV_{\perp} &= Rg \cos \theta \operatorname{tg} \gamma \left[ \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta - f^2} \cos \alpha - \frac{F_d}{mg} \sin \gamma \right] \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (31)$$

Используя ортогональность компонентов скоростей

$$V_{\parallel} dV_{\parallel} + V_{\perp} dV_{\perp} = \frac{1}{2} (dV_{\parallel}^2 + dV_{\perp}^2) = \frac{1}{2} d(V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2) = \frac{1}{2} dV^2,$$

сумма уравнений в (31) будет:

$$\begin{aligned} dV^2 &= 2Rg \cos \theta \left[ \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta - f^2} \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} \gamma \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg \cos \gamma} \right] \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко показать, разложив в ряд Маклорена радикал в (32) до члена второго порядка, с учетом допущений  $f \leq 0,04$  и  $f \ll \operatorname{tg} \delta$ , что

$$\begin{aligned} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta - f^2} &= \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - \frac{f^2}{\operatorname{tg}^2 \delta}} = \\ &= \operatorname{tg} \delta \left(1 - \frac{f^2}{2\operatorname{tg}^2 \delta} + \dots\right) \approx \operatorname{tg} \delta - \frac{f^2}{2\operatorname{tg} \delta} \approx \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда (32) приобретет вид:

$$\begin{aligned} dV^2 &= 2Rg \cos \theta \left[ \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha + \right. \\ &\left. + \operatorname{tg} \gamma \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg \cos \gamma} \right] \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (34)$$

### Безразмерная форма интегральных выражений

Введем безразмерные аналоги используемых кинематических параметров движения, обозначив их тильдой ( $\tilde{\phantom{x}}$ ):

$$\begin{aligned} \text{Время:} \quad & \tilde{t} = \sqrt{\frac{g}{R}} t, & t &= \sqrt{\frac{R}{g}} \tilde{t}; \\ \text{Скорости:} \quad & \tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{Rg}} V, & V &= \sqrt{Rg} \tilde{V}; \\ & \tilde{V}_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{Rg}} V_{\parallel}, & V_{\parallel} &= \sqrt{Rg} \tilde{V}_{\parallel}; \\ & \tilde{V}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{Rg}} V_{\perp}, & V_{\perp} &= \sqrt{Rg} \tilde{V}_{\perp}; \\ \text{Радиус кривизны} & \tilde{\rho} = \frac{1}{R} \rho = \cos \theta, \text{ из (11), } \rho = R\tilde{\rho}; & (35) \\ \text{контактной линии} & & & \\ \text{лыжи со склоном:} & & & \\ \text{Кривизна:} \quad & \tilde{k} = Rk, & k &= \frac{1}{R} \tilde{k}; \\ \text{Путь по траектории:} \quad & \tilde{s} = \frac{1}{R} s, & s &= R\tilde{s}; \\ \text{Координаты:} \quad & \tilde{x} = \frac{1}{R} x, & x &= R\tilde{x}; \\ & \tilde{y} = \frac{1}{R} y, & y &= R\tilde{y} \end{aligned}$$

Подставим параметры, выраженные через их безразмерные аналоги (правые части в (35)) в формулу (20), после сокращения и интегрирования получим:

$$d\tilde{t} = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{V} \cos \gamma} \Gamma(\beta) d\beta, \quad \tilde{t} = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{V} \cos \gamma} \Gamma(\beta) d\beta. \quad (36)$$

Аналогично поступим с формулой (34):

$$\begin{aligned} d(\tilde{V}^2) &= 2\tilde{\rho} \left[ \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha + \right. \\ &\left. + \operatorname{tg} \gamma \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg \cos \gamma} \right] \Gamma(\beta) d\beta, \\ \tilde{V} &= \left( \tilde{V}_0^2 + 2 \int_{\beta_0}^{\beta} \tilde{\rho} \left[ \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha + \right. \right. \\ &\left. \left. + \operatorname{tg} \gamma \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{F_d}{mg \cos \gamma} \right] \Gamma(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Соответственно (27) и (28) преобразуются так:

$$\begin{aligned} d\tilde{s} &= \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \Gamma(\beta) d\beta, & \tilde{s} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \Gamma(\beta) d\beta; \\ d\tilde{x} &= \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \sin \beta \Gamma(\beta) d\beta, & \tilde{x} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \sin \beta \Gamma(\beta) d\beta; \\ d\tilde{y} &= \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \cos \beta \Gamma(\beta) d\beta, & \tilde{y} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \cos \beta \Gamma(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (38)$$

В полученных интегральных соотношениях (36)–(38) фигурирует безразмерный радиус кривизны контактной линии лыжи со склоном  $\tilde{\rho} = \cos \theta$ . Поскольку угол закантовки  $\theta = \delta + \varphi$ , найдем связь угла наклона опорной линии  $\delta$  и ангуляции  $\varphi$  с кинематическими параметрами движения. Используя кинематическое соотношение  $a_{cn} = V^2/\rho_a$  и (26), а также пренебрегая за малостью углом  $\zeta$ , из 2-го уравнения в (7) получим для безразмерной скорости движения согласующее уравнение:

$$\tilde{V}^2 = (\operatorname{tg} \delta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \cos^{-1} \gamma) \Gamma(\beta) \cos(\delta + \varphi). \quad (39)$$

Учитывая формулу для оценки силы аэродинамического сопротивления (раздел 2.4), фигурируемое в (37) отношение примет вид:

$$\frac{F_d}{mg} = \frac{cV^2}{mg} = \frac{cRg\tilde{V}^2}{mg} = c\tilde{V}^2 \frac{R}{m}, \quad (40)$$

что свидетельствует о явной зависимости изменения безразмерной скорости от величины радиуса  $R$  бокового выреза лыж:

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \left( \tilde{V}_0^2 + 2 \int_{\beta_0}^{\beta} \tilde{\rho} \left[ \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha - \right. \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cos \alpha - f \cos \alpha - c\tilde{V}^2 R/(m \cos \gamma) \right] \Gamma(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

# MECHANICS OF ALPINE SKIING: TURN WITH SIDE-SLIP AND SKI JUDDER ON CARVING SKIS

S.D. Legotin<sup>1</sup>, K.B. Obnosov<sup>1</sup>, A.A. Rivlin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Training Center of the Ski and Snowboard Federation of Russia, Moscow, Russia

---

## ARTICLE INFO

Received: 21 May 2022

Approved: 29 August 2022

Accepted for publication: 02 September 2022

### Key words:

biomechanics of sport, alpine skiing, angulations, skier's inclination, sliding ski turn, ski judder, modeling.

## ABSTRACT

In the works published to date, considering the question of mathematical modeling of a ski sliding turn, the parameters of a side cutout of a certain radius characteristic of the design of modern alpine skis are not taken into account. The presence of such a cutout is one of the main factors of the behavior of the ski when performing any turn, including a side-slip turn. The presented work is devoted to the creation of a numerical model of the movement of the mechanical system "skier-skier" when performing a turn on carving skis with lateral slippage and ski judder. In this case, the turn is considered under conditions of relative equilibrium in the reference frame associated with the moving center of mass and taking into account the angulation controlled by the skier. As the main assumption of the model, it is assumed that the movement in a sliding turn can be decomposed into orthogonal directions: lateral sliding and movement along the skis according to the algorithm corresponding to a clean-cut turn (carving) [18]. The model takes into account the forces of resistance to movement – the sliding friction force and the aerodynamic drag force. For greater generality and universality, the developed numerical model is implemented for dimensionless motion parameters, namely, to describe the dimensionless kinematic characteristics of the motion of the center of mass of the mechanical system under consideration. A system of integral equations is obtained, with the help of which it is possible to find the speed, time and trajectory of the center of mass, as well as to estimate the angles characterizing the position of the skier's body and his skis relative to the slope with various stylistic angulations set by the athlete. The created model is illustrated by solutions of problems for cases with various dependences of the sliding angle on the angle of movement controlled by the skier.

© PNRPU